

## CHAPITRE 3

# Thermodynamique de sous-systèmes simples

### 3.1 Thermalisation de deux sous-systèmes

★★★ Un système isolé est constitué de deux sous-systèmes fermés 1 et 2 séparés par une paroi immobile, diatherme et imperméable. Initialement, ils sont à températures  $T_{1i}$  et  $T_{2i}$ . Le sous-système 1 contient  $N_1$  moles de gaz. L'énergie interne du gaz est donnée par  $U_1 = c_1 N_1 R T_1$ , où  $T_1$  est la température du gaz,  $R$  est une constante positive et  $c_1$  est un coefficient sans dimension. De manière similaire, il y a  $N_2$  moles de gaz dans le sous-système 2 et l'énergie interne du gaz est donnée par  $U_2 = c_2 N_2 R T_2$ .

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système après thermalisation.
- 2) Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U_{1i \rightarrow f}$  due à la thermalisation.
- 3) Comparer la température initiale  $T_{2i}$  du sous-système 2 et la température finale  $T_f$  du système si la taille du sous-système 2 est beaucoup plus grande que celle du sous-système 1.

#### 3.1 Solution

- 1) L'énergie interne du système dans l'état initial  $i$  est la somme des énergies internes initiales des deux sous-systèmes,

$$U_i = U_{1i} + U_{2i} = c_1 N_1 R T_{1i} + c_2 N_2 R T_{2i}$$

Dans l'état final  $f$  après thermalisation, le système est à l'équilibre thermique à température finale  $T_f$ . L'énergie interne du système dans l'état final  $f$  est la somme des énergies internes finales des deux sous-systèmes,

$$U_f = U_{1f} + U_{2f} = c_1 N_1 R T_f + c_2 N_2 R T_f$$

Étant donné que le système est isolé, la variation d'énergie interne (1.65) est nulle,

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = U_f - U_i = c_1 N_1 R T_f + c_2 N_2 R T_f - c_1 N_1 R T_{1i} - c_2 N_2 R T_{2i} = 0$$

Par conséquent, la température finale du système est,

$$T_f = \frac{c_1 N_1 T_{1i} + c_2 N_2 T_{2i}}{c_1 N_1 + c_2 N_2}$$

2) La variation d'énergie interne du premier sous-système s'écrit,

$$\Delta U_{1i \rightarrow f} = U_{1f} - U_{1i} = c_1 N_1 R (T_f - T_{1i})$$

et peut être mise sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}\Delta U_{1i \rightarrow f} &= c_1 N_1 R \left( \frac{c_1 N_1 T_{1i} + c_2 N_2 T_{2i}}{c_1 N_1 + c_2 N_2} - T_{1i} \right) \\ &= \frac{c_1 c_2 N_1 N_2}{c_1 N_1 + c_2 N_2} R (T_{2i} - T_{1i})\end{aligned}$$

3) La température finale du système  $T_f$  peut s'écrire,

$$T_f = \frac{1}{1 + \frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2}} \left( T_{2i} + \frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2} T_{1i} \right)$$

Si le sous-système 2 est beaucoup plus grand que le sous-système 1, il contient beaucoup plus de gaz, c'est-à-dire  $N_1 \ll N_2$ . Dans cette limite, pour des coefficients  $c_1$  et  $c_2$  et des températures  $T_{1i}$  et  $T_{2i}$  du même ordre de grandeur,

$$\frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{c_1}{c_2} \frac{N_1}{N_2} T_{1i} \ll T_{2i}$$

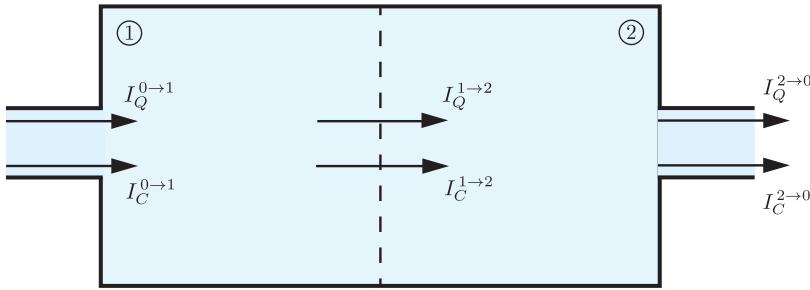
Ainsi, compte tenu de ces approximations, la température finale du système  $T_f$  est égale à la température initiale  $T_{2i}$  du sous-système 2,

$$T_f = T_{2i}$$

Ainsi, la température  $T_{2i}$  reste constante durant le processus de thermalisation. En d'autres termes, la température du grand sous-système 2 ne varie pas lorsqu'il est mis en contact avec le petit sous-système 1. Le sous-système 2 se comporte alors comme un réservoir de chaleur ou un bain thermique. On introduira formellement la notion de réservoir de chaleur au chapitre suivant (sect. 4.5.1).

### 3.5 Transfert stationnaire de matière entre deux blocs

★★★ Un système est formé de deux blocs contenant une seule substance homogène, considérés comme des systèmes simples, séparés par une paroi fixe, diatherme et perméable (fig. 3.1). Le système est maintenu à température  $T$ . Le bloc 1 est maintenu à un potentiel chimique  $\mu_1$  et le bloc 2 à un potentiel chimique  $\mu_2$  où  $\mu_1 > \mu_2$ . Un transfert stationnaire de matière a lieu entre les blocs. On note  $I_Q^{0 \rightarrow 1}$  et  $I_C^{0 \rightarrow 1}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière de l'environnement vers le bloc 1,  $I_Q^{1 \rightarrow 2}$  et  $I_C^{1 \rightarrow 2}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 1 vers le bloc 2, et  $I_Q^{2 \rightarrow 0}$  et  $I_C^{2 \rightarrow 0}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 2 vers l'environnement. On suppose que le transfert de matière entre l'environnement et chaque bloc a lieu au potentiel chimique du bloc. Durant le transfert stationnaire de matière et de chaleur :



**Fig. 3.1** Un transfert stationnaire de matière et de chaleur a lieu entre l'environnement et le bloc 1, le bloc 1 et le bloc 2, et le bloc 2 et l'environnement.

- 1) Montrer que les sommes du courant de chaleur et du courant énergétique de matière de l'environnement vers le premier bloc, du premier bloc vers le deuxième, et du deuxième bloc vers l'environnement sont égales,

$$I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_C^{0 \rightarrow 1} = I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_C^{1 \rightarrow 2} = I_Q^{2 \rightarrow 0} + I_C^{2 \rightarrow 0}$$

- 2) Montrer que les courants de substance de l'environnement vers le premier bloc, du premier bloc vers le deuxième et du deuxième bloc vers l'environnement sont égaux,

$$I \equiv I^{0 \rightarrow 1} = I^{1 \rightarrow 2} = I^{2 \rightarrow 0}$$

- 3) Déterminer le courant d'entropie  $I_S$  entre l'environnement et le système et la source d'entropie  $\Sigma_S$  du système.

- 4) Montrer que le courant de chaleur sortant du système est supérieur au courant de chaleur entrant,

$$I_Q^{2 \rightarrow 0} > I_Q^{0 \rightarrow 1}$$

- 5) Exprimer le courant énergétique de matière  $I_C$  de l'environnement vers le système en termes du courant de substance  $I$ , puis en termes de la source d'entropie  $\Sigma_S$ .

- 6) Justifier que le courant énergétique de matière peut être écrit de la manière suivante,

$$I_C = R_C I^2$$

et déterminer la résistance  $R_C$  au transfert de matière de la paroi entre les blocs.

### 3.5 Solution

- 1) Le courant de chaleur  $I_{Q_1}$  et le courant énergétique de matière  $I_{C_1}$  entrant dans le bloc 1 sont la différence entre les courants entrant de l'environnement et les courants sortant dans le bloc 2, et le courant de chaleur  $I_{Q_2}$  et le courant énergétique de matière  $I_{C_2}$  entrant dans le bloc 2 sont la différence entre les courants entrant du bloc 1 et les courants sortant dans

l'environnement,

$$\begin{aligned} I_{Q_1} + I_{C_1} &= I_Q^{0 \rightarrow 1} - I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{1 \rightarrow 2} \\ I_{Q_2} + I_{C_2} &= I_Q^{1 \rightarrow 2} - I_Q^{2 \rightarrow 0} + I_C^{1 \rightarrow 2} - I_C^{2 \rightarrow 0} \end{aligned}$$

Durant le transfert stationnaire de matière et de chaleur, la dérivée temporelle de l'énergie interne de chaque bloc est nulle. Ainsi, le premier principe (3.6) appliqué à chaque bloc, considéré comme un système simple, s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= I_{Q_1} + I_{C_1} = I_Q^{0 \rightarrow 1} - I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{1 \rightarrow 2} = 0 \\ \dot{U}_2 &= I_{Q_2} + I_{C_2} = I_Q^{1 \rightarrow 2} - I_Q^{2 \rightarrow 0} + I_C^{1 \rightarrow 2} - I_C^{2 \rightarrow 0} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les sommes du courant de chaleur et du courant énergétique de matière sont égales,

$$I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_C^{0 \rightarrow 1} = I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_C^{1 \rightarrow 2} = I_Q^{2 \rightarrow 0} + I_C^{2 \rightarrow 0}$$

- 2) Le courant de substance  $I_1$  entrant dans le bloc 1 est la différence entre le courant entrant de l'environnement et le courant sortant dans le bloc 2, et le courant de substance  $I_2$  entrant dans le bloc 2 est la différence entre le courant entrant du bloc 1 et le courant sortant dans l'environnement,

$$I_1 = I^{0 \rightarrow 1} - I^{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad I_2 = I^{1 \rightarrow 2} - I^{2 \rightarrow 0}$$

En état stationnaire, la dérivée temporelle du nombre de moles de substances dans chaque bloc est nulle. Ainsi, l'équation de bilan de substance (2.22) de chaque bloc, considéré comme un système simple, s'écrit,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= I_1 = I^{0 \rightarrow 1} - I^{1 \rightarrow 2} = 0 \\ \dot{N}_2 &= I_2 = I^{1 \rightarrow 2} - I^{2 \rightarrow 0} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, les courants de substance sont égaux,

$$I \equiv I^{0 \rightarrow 1} = I^{1 \rightarrow 2} = I^{2 \rightarrow 0}$$

- 3) Le premier principe (3.6), appliqué à chaque bloc, est exprimé en termes des courants d'entropie et de substance comme,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= T I_{S_1} + \mu_1 I_1 = 0 \\ \dot{U}_2 &= T I_{S_2} + \mu_2 I_2 = 0 \end{aligned}$$

où  $I_{S_1}$  et  $I_{S_2}$  sont les courants d'entropie des blocs 1 et 2. Ainsi, les courants d'entropie de chaque bloc sont,

$$\begin{aligned} I_{S_1} &= -\frac{\mu_1}{T} I_1 = \frac{\mu_1}{T} (I^{1 \rightarrow 2} - I^{0 \rightarrow 1}) \\ I_{S_2} &= -\frac{\mu_2}{T} I_2 = \frac{\mu_2}{T} (I^{2 \rightarrow 0} - I^{1 \rightarrow 2}) \end{aligned}$$

Comme les blocs sont des systèmes simples, leur source d'entropie est nulle (3.8). Ainsi, la dérivée temporelle de l'entropie du système est la somme des courants d'entropie des blocs. En état stationnaire, la dérivée temporelle de l'entropie du système est nulle,

$$\dot{S} = I_{S_1} + I_{S_2} = \frac{1}{T} (\mu_2 I^{2 \rightarrow 0} - \mu_1 I^{0 \rightarrow 1}) + \frac{1}{T} (\mu_1 - \mu_2) I^{1 \rightarrow 2} = 0$$

Compte tenu de l'équation de bilan d'entropie du système (2.3), on identifie alors le courant d'entropie entre l'environnement et le système,

$$I_S = \frac{1}{T} (\mu_2 I^{2 \rightarrow 0} - \mu_1 I^{0 \rightarrow 1}) = \frac{1}{T} (\mu_2 - \mu_1) I$$

et la source d'entropie du système,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (\mu_1 - \mu_2) I^{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{T} (\mu_1 - \mu_2) I$$

On en conclut que le courant d'entropie est l'opposé de la source d'entropie,

$$\Sigma_S = -I_S > 0$$

comme il se doit pour un transfert stationnaire de matière.

- 4) Les courants énergétiques de matière liés au transfert de matière entre les deux sous-systèmes et l'environnement s'écrivent,

$$I_C^{0 \rightarrow 1} = \mu_1 I^{0 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad I_C^{2 \rightarrow 0} = \mu_2 I^{2 \rightarrow 0}$$

Ainsi, le courant énergétique de matière entrant est supérieur au courant énergétique de matière sortant,

$$I_C^{0 \rightarrow 1} = \mu_1 I^{0 \rightarrow 1} > \mu_2 I^{0 \rightarrow 1} = \mu_2 I^{2 \rightarrow 0} = I_C^{2 \rightarrow 0}$$

ce qui implique que le courant de chaleur sortant est supérieur au courant de chaleur entrant,

$$I_Q^{2 \rightarrow 0} = I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{2 \rightarrow 0} > I_Q^{0 \rightarrow 1}$$

pour compenser le dégagement de chaleur dû à la dissipation générée par le transfert irréversible de matière dans le système.

- 5) Les courants énergétiques de matière de l'environnement vers chaque sous-système s'écrivent,

$$I_{C_1} = I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad I_{C_2} = I_C^{1 \rightarrow 2} - I_C^{2 \rightarrow 0}$$

Le courant énergétique de matière de l'environnement vers le système est la somme de ces courants,

$$I_C = I_{C_1} + I_{C_2} = I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{2 \rightarrow 0}$$

Les courants énergétiques de matière sont exprimés en termes des courants de substance et des potentiels chimiques de manière suivante,

$$I_C^{0 \rightarrow 1} = \mu_1 I^{0 \rightarrow 1} = \mu_1 I \quad \text{et} \quad I_C^{2 \rightarrow 0} = \mu_2 I^{2 \rightarrow 0} = \mu_2 I$$

Par conséquent, le courant énergétique de matière de l'environnement vers le système devient,

$$I_C = (\mu_1 - \mu_2) I$$

La source d'entropie s'écrit,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (\mu_1 - \mu_2) I = \frac{I_C}{T} > 0$$

Ainsi le courant énergétique de matière de l'environnement vers le système peut être écrit comme,

$$I_C = T \Sigma_S > 0$$

- 6) Étant donné que la source d'entropie  $\Sigma_S$  décrit le transfert irréversible de matière dans le système, elle est une fonction strictement positive du courant de substance  $I$ . Au voisinage de l'équilibre où le courant de substance est suffisamment petit, le courant énergétique de matière, qui est le produit de la température et de la source d'entropie, doit être une forme quadratique définie positive du courant de substance  $I$  où la constante de proportionnalité positive est la résistance au transfert de matière de la paroi entre les blocs,

$$I_C = T \Sigma_S = R_C I^2 > 0$$

Par conséquent, la résistance  $R_C$  au transfert de matière de la paroi entre les blocs est,

$$R_C = \frac{I_C}{I^2} = \frac{T \Sigma_S}{I^2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{I} > 0$$

et la différence de potentiel chimique entre les blocs  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$  s'écrit,

$$\Delta\mu = R_C I$$

### 3.6 Diffusion d'un gaz à travers une paroi perméable

★★★☆ On désire modéliser la diffusion d'un gaz constitué d'une seule substance à travers une paroi perméable diatherme. On considère un système isolé contenant  $N$  moles de gaz, formé de deux sous-systèmes de volumes identiques séparés par une paroi perméable rigide. Le gaz diffuse d'un sous-système à l'autre. Il y a  $N_1(t)$  moles de gaz dans le sous-système 1 et  $N_2(t)$  moles dans le sous-système 2. On modélise les potentiels chimiques en considérant qu'ils sont proportionnels à la quantité de substance :

$$\begin{aligned} \mu_1(N_1(t)) &= \frac{\ell}{FA} \frac{N_1(t)}{2\tau} \\ \mu_2(N_2(t)) &= \frac{\ell}{FA} \frac{N_2(t)}{2\tau} \end{aligned}$$

où  $\tau > 0$  est un temps caractéristique de diffusion,  $F > 0$ , le coefficient de diffusion de Fick,  $A > 0$ , l'aire et  $\ell > 0$ , l'épaisseur de la paroi. Initialement, il y a  $N_0$  moles dans le sous-système 1, c'est-à-dire  $N_1(0) = N_0$ , et  $N - N_0$  moles dans le sous-système 2, c'est-à-dire  $N_2(0) = N - N_0$ . Déterminer l'évolution du nombre de moles  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  dans les sous-systèmes 1 et 2. En déduire le nombre de moles dans chaque sous-système à l'équilibre.

### 3.6 Solution

La quantité de gaz dans le système est égale à la somme de la quantité de gaz dans les deux sous-systèmes,

$$N = N_1(t) + N_2(t)$$

Comme le système est isolé, la dérivée temporelle  $\dot{N}_1$  du nombre de moles de gaz dans le sous-système 1 est égale au courant de gaz  $I^{2 \rightarrow 1}$  à travers la paroi. D'après l'équation de diffusion irréversible (3.75), on obtient l'équation d'évolution du nombre de moles de gaz,

$$\begin{aligned}\dot{N}_1(t) &= I^{2 \rightarrow 1}(t) = F \frac{A}{\ell} (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \\ &= \frac{1}{2\tau} (N_2(t) - N_1(t)) = -\frac{1}{\tau} \left( N_1(t) - \frac{N}{2} \right)\end{aligned}$$

L'intégrale de cette équation d'évolution s'écrit formellement,

$$\int_{N_0}^{N_1(t)} \frac{dN'_1(t')}{N'_1(t') - \frac{N}{2}} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt'$$

et le résultat de cette intégration est donné par,

$$\ln \left( \frac{N_1(t) - \frac{N}{2}}{N_0 - \frac{N}{2}} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

ce qui implique que,

$$N_1(t) = \frac{N}{2} + \left( N_0 - \frac{N}{2} \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

et, vu que  $N_2(t) = N - N_1(t)$ , on a,

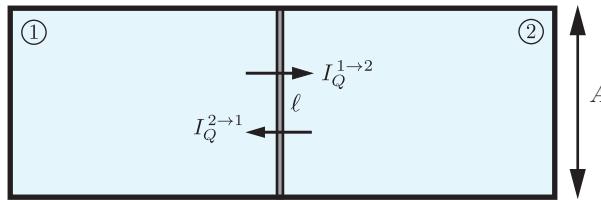
$$N_2(t) = \frac{N}{2} + \left( \frac{N}{2} - N_0 \right) \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right)$$

Ainsi, à l'équilibre, lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,

$$N_1(\infty) = N_2(\infty) = \frac{N}{2}$$

ce qui signifie qu'il y a la même quantité de gaz dans chaque sous-système. Par conséquent, à l'équilibre, le système est homogène.

### 3.7 Thermalisation par conduction



**Fig. 3.2** Deux blocs métalliques formés du même métal sont séparés par une paroi diatherme de section  $A$  et d'épaisseur  $\ell$ . Les métaux atteignent un état d'équilibre thermique dû au transfert de chaleur par conduction à travers la paroi.

★★★ Un système isolé est formé de deux blocs métalliques qui sont constitués de  $N_1$  et  $N_2$  moles du même métal (fig. 3.2). On modélise l'interface entre les deux blocs comme une fine paroi diatherme métallique de section  $A$ , d'épaisseur  $\ell$ , de conductivité thermique  $\kappa$  et d'énergie interne négligeable. Les énergies internes des blocs 1 et 2 sont,

$$U_1(t) = 3N_1RT_1(t) \quad \text{et} \quad U_2(t) = 3N_2RT_2(t)$$

où  $R$  est une constante positive. Les températures initiales des blocs sont différentes, c'est-à-dire  $T_1(0) \neq T_2(0)$ .

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système lorsqu'il atteint l'équilibre thermique au temps  $t_f$ .
- 2) Établir le système d'équations différentielles qui décrit l'évolution temporelle couplée des températures  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des deux blocs.
- 3) Dans le cas particulier où les blocs ont le même nombre de moles de constituants, c'est-à-dire  $N_1 = N_2 = N$ , montrer que la différence de température  $\Delta T(t) = T_1(t) - T_2(t)$  décroît de manière exponentielle au cours du temps lors de la thermalisation.

#### 3.7 Solution

- 1) Compte tenu des énergies internes des deux blocs au temps initial  $t = 0$  et au temps final  $t = t_f$ ,

$$\begin{aligned} U_1(0) &= 3N_1RT_1(0) & \text{et} & \quad U_1(t_f) = 3N_1RT_f \\ U_2(0) &= 3N_2RT_2(0) & \text{et} & \quad U_2(t_f) = 3N_2RT_f \end{aligned}$$

la variation d'énergie interne de chaque bloc s'écrit,

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= U_1(t_f) - U_1(0) = 3N_1R(T_f - T_1(0)) \\ \Delta U_2 &= U_2(t_f) - U_2(0) = 3N_2R(T_f - T_2(0)) \end{aligned}$$

La variation d'énergie interne  $\Delta U$  du système est la somme des variations d'énergies internes  $\Delta U_1$  et  $\Delta U_2$  des deux blocs. Étant donné que le système est isolé, la dérivée temporelle de l'énergie interne du système est nulle (1.47),

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

ce qui s'écrit explicitement comme,

$$3N_1R(T_f - T_1(0)) + 3N_2R(T_f - T_2(0)) = 0$$

Ainsi, on obtient l'expression de la température finale  $T_f$  du système,

$$T_f = \frac{N_1T_1(0) + N_2T_2(0)}{N_1 + N_2}$$

- 2) Le premier principe (3.6) appliqué à chaque sous-système est décrit par la loi de Fourier (3.22),

$$\begin{aligned}\dot{U}_1(t) &= 3N_1R\dot{T}_1(t) = I_Q^{2 \rightarrow 1}(t) = \kappa \frac{A}{\ell} (T_2(t) - T_1(t)) \\ \dot{U}_2(t) &= 3N_2R\dot{T}_2(t) = I_Q^{1 \rightarrow 2}(t) = \kappa \frac{A}{\ell} (T_1(t) - T_2(t))\end{aligned}$$

Ainsi, les équations d'évolution temporelle des températures des blocs sont données par,

$$\begin{aligned}\dot{T}_1(t) &= \frac{\kappa}{3N_1R} \frac{A}{\ell} (T_2(t) - T_1(t)) \\ \dot{T}_2(t) &= \frac{\kappa}{3N_2R} \frac{A}{\ell} (T_1(t) - T_2(t))\end{aligned}$$

- 3) La dérivée temporelle de la différence de température  $\Delta T(t) = T_1(t) - T_2(t)$  entre les blocs s'écrit,

$$\Delta\dot{T}(t) = \dot{T}_1(t) - \dot{T}_2(t)$$

Par conséquent, dans le cas particulier où les blocs ont le même nombre de moles de constituants, c'est-à-dire  $N_1 = N_2 = N$ , l'équation d'évolution de la différence de température entre les blocs est la suivante,

$$\Delta\dot{T}(t) = -\frac{2\kappa}{3NR} \frac{A}{\ell} \Delta T(t)$$

Compte tenu de la différentielle  $d(\Delta T(t')) = \Delta\dot{T}(t') dt'$ , l'intégration de l'équation différentielle par rapport au temps de  $t' = 0$  à  $t' = t$  s'écrit,

$$\int_{\Delta T(0)}^{\Delta T(t)} \frac{d(\Delta T(t'))}{\Delta T'(t')} = -\frac{2\kappa}{3NR} \frac{A}{\ell} \int_0^t dt'$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$\ln\left(\frac{\Delta T(t)}{\Delta T(0)}\right) = -\frac{2\kappa}{3NR} \frac{A}{\ell} t \equiv -\frac{t}{\tau}$$

où le temps de thermalisation  $\tau$  est défini comme,

$$\tau = \frac{3NR}{2\kappa} \frac{\ell}{A}$$

Ainsi, la différence de température entre les deux blocs décroît de manière exponentielle au cours du temps lors de la thermalisation,

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

où  $\Delta T(0) = T_1(0) - T_2(0)$ .

### 3.9 Amortissement mécanique par transfert de chaleur

**★★★☆** Un système isolé de volume  $V$  est constitué de deux sous-systèmes, notés 1 et 2, séparés par une paroi imperméable, diatherme et mobile, de masse  $M$ , d'aire  $A$  et de volume négligeable. Les deux sous-systèmes sont à l'équilibre thermique à température  $T$ . Ils sont constitués chacun de  $N$  moles de gaz parfait, ce qui signifie que la pression  $p_i$  du gaz dans le sous-système  $i$ , son volume  $V_i$ , le nombre de moles  $N$  et la température  $T$  sont liés par l'équation  $p_i V_i = NRT$  où  $R$  est une constante positive (sect. 5.6). La masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi et l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz. Initialement, le système n'est pas à l'équilibre mécanique. On considère que la variation de volume  $\Delta V$  entre le volume  $V_i$  de chaque sous-système et son volume  $V_0$  à l'équilibre mécanique est petite, c'est-à-dire  $\Delta V \ll V_0$ .

- 1) Exprimer la source d'entropie  $\Sigma_S$  en termes de la variation de pression entre les sous-systèmes  $p_1 - p_2$  et des dérivées temporelles du volume  $\dot{V}_1$  et  $\ddot{V}_1$ .
- 2) Déterminer la différence de pression  $p_1 - p_2$  entre les sous-systèmes en écrivant la source d'entropie comme une forme quadratique définie positive,

$$\Sigma_S = \frac{\xi}{T} \dot{V}_1^2 \geq 0$$

- 3) Compte tenu du fait que les sous-systèmes sont constitués d'un gaz parfait, à l'aide d'un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , montrer que l'équation du mouvement de la paroi est celle d'un oscillateur harmonique amorti,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où  $x$  est la coordonnée du déplacement de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'expression du coefficient de frottement  $\gamma$  et de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations non amorties.

- 4) En régime d'amortissement faible, c'est-à-dire  $\gamma < \omega_0$ , déterminer la période  $T$  des oscillations amorties.

### 3.9 Solution

- 1) Comme la masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi, que le volume de la paroi est négligeable par rapport au volume du gaz et que l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz, l'énergie du système est la somme de l'énergie cinétique de la paroi de masse  $M$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , et des énergies internes  $U_1$  et  $U_2$  du gaz dans les deux sous-systèmes,

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + U_1 + U_2$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne s'écrit,

$$\dot{E} = M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

Comme la paroi est imperméable, le nombre de moles de gaz  $N$  dans chaque sous-système est constant. De plus, le système est à l'équilibre thermique à température  $T$ . Ainsi, compte tenu de la relation (2.19), les dérivées temporelles de l'énergie interne de chaque sous-système s'écrivent,

$$\dot{U}_1 = T \dot{S}_1 - p_1 \dot{V}_1 \quad \text{et} \quad \dot{U}_2 = T \dot{S}_2 - p_2 \dot{V}_2$$

Comme le système est isolé, l'énergie  $E$  est constante d'après le premier principe (1.13). Ainsi, la dérivée temporelle de l'énergie s'annule,

$$\dot{E} = T (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) - p_1 \dot{V}_1 - p_2 \dot{V}_2 + M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = 0$$

De plus, il n'y a pas d'échange d'entropie avec l'environnement. Par conséquent, compte tenu du deuxième principe (2.1) et de l'extensivité de l'entropie (3.2),

$$\dot{S}_1 + \dot{S}_2 = \dot{S} = \Sigma_S$$

Ainsi, on obtient une expression pour la source d'entropie  $\Sigma_S$ ,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} (p_1 \dot{V}_1 + p_2 \dot{V}_2 - M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})$$

Comme le système est isolé, son volume  $V$  est constant. On déduit alors la condition suivante,

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0 \quad \text{ainsi} \quad \dot{V}_2 = -\dot{V}_1$$

On définit l'orientation positive du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  de la paroi lorsque son mouvement accroît le volume  $V_1$  du sous système 1, c'est-à-dire lorsque  $\dot{V}_1 > 0$ . En introduisant alors un vecteur surface de la paroi  $\mathbf{A} = \text{cste}$  colinéaire au vecteur vitesse et dont la norme correspond à l'aire  $A$  de la surface de la paroi, on obtient les conditions suivantes,

$$\dot{V}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad \text{et ainsi} \quad \ddot{V}_1 = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

ce qui implique que,

$$M \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{M}{A^2} \dot{V}_1 \ddot{V}_1$$

Par conséquent, la source d'entropie devient,

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} \left( (p_1 - p_2) - \frac{M}{A^2} \ddot{V}_1 \right) \dot{V}_1$$

- 2) D'après la condition d'évolution du deuxième principe (2.3), la source d'entropie doit être une forme quadratique définie positive,

$$\Sigma_S = \frac{\xi}{T} \dot{V}_1^2 \geq 0$$

où  $\xi > 0$  est le coefficient de frottement thermoélastique qui est différent de celui obtenu pour une paroi de masse négligeable (3.48). En comparant les deux expressions pour la source d'entropie, on obtient la différence de pression entre les sous-systèmes en termes de  $\dot{V}_1$  et de  $\ddot{V}_1$ ,

$$p_1 - p_2 = \frac{M}{A^2} \ddot{V}_1 + \xi \dot{V}_1$$

- 3) Comme il y a  $N$  moles de gaz dans chaque sous-système, le volume  $V_0$  de chaque sous-système à l'équilibre sera la moitié du volume  $V$  du système. Ainsi, dans la limite d'un petit déplacement autour de la position d'équilibre,

$$V_1 = V_0 + \Delta V \quad \text{et} \quad V_2 = V_0 - \Delta V$$

où  $V_0 = V/2$  et  $\Delta V \ll V_0$ . Comme il y a  $N$  moles de gaz parfait à température  $T$  dans chaque sous-système, en faisant un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , on obtient,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{NRT}{V_1} = \frac{NRT}{V_0} \frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V_0}} \simeq \frac{NRT}{V_0} \left( 1 - \frac{\Delta V}{V_0} \right) \\ p_2 &= \frac{NRT}{V_2} = \frac{NRT}{V_0} \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V_0}} \simeq \frac{NRT}{V_0} \left( 1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, compte tenu de  $V_0 = V/2$ , on obtient dans cette limite,

$$p_1 - p_2 = - \frac{2NRT}{V_0^2} \Delta V = - \frac{8NRT}{V^2} \Delta V$$

La variation de volume  $\Delta V$  est le produit de l'aire  $A$  de la surface de la paroi et du déplacement  $x$  de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Ainsi, compte tenu du fait que  $x = 0$  à l'équilibre et  $V_0 = \text{cste}$ ,

$$\Delta V = Ax \quad \text{et} \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_0 + \Delta \dot{V} = \Delta \dot{V} = A\dot{x} \quad \text{ainsi} \quad \ddot{V}_1 = A\ddot{x}$$

À l'aide de ces relations, l'équation du mouvement obtenue au point précédent multipliée par  $A/M$  devient,

$$\ddot{x} + \frac{\xi A^2}{M} \dot{x} + \frac{8A^2 NRT}{MV^2} x = 0$$

Cette équation décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique amorti, qui peut être mis sous la forme,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où le coefficient de frottement est donné par,

$$\gamma = \frac{\xi A^2}{2M}$$

et la pulsation des oscillations non amorties s'écrit,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8A^2NRT}{MV^2}}$$

- 4) En régime d'amortissement faible,  $\gamma < \omega_0$ , la pulsation des oscillations amorties est donnée par<sup>(1)</sup>,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \frac{A}{2MV} \sqrt{32MNRT - \xi^2 A^2 V^2}$$

La période des oscillations amorties est alors,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi MV}{A} \frac{1}{\sqrt{32MNRT - \xi^2 A^2 V^2}}$$

L'équation du mouvement oscillatoire amorti rend compte de l'amortissement viscoélastique décrit en rhéologie par le modèle de **Zener**<sup>(2)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> J.-Ph. Ansermet, *Mécanique*, Traité de physique, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2013, sect. 2.5.

<sup>(2)</sup> Clarence Zener, *Elasticity and Anelasticity of Metals*, The University of Chicago Press, 1948.